Ενδεικτικές Απαντήσεις για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού

Πανελλαδικές Εξετάσεις Ημερήσιων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων

Τετάρτη 3 Ιουνίου 2026

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.185

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

Θέμα Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2\ell n(x-1)$

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β1. $\boxed{fog}$ $\begin{cases} x\in D_g \\ \text{και} \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2}+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \text{και} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Επομένως ορίζεται η fog και είναι η συνάρτηση $(fog)(x)=f(g(x))=$

$$=2\ell n\left(\sqrt{x-2}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)=2\ell n\sqrt{x-2}=$$

$$=\ell n\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\ell n(x-2)\quad \text{με } x>2.$$

Β2. $h(x)=\ell n(x-2), x\in(2,+\infty)$

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ δηλ. η $h\uparrow(2,+\infty)$ οπότε η h 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτουμε $\psi=h(x)$ και λύνουμε ως προς x.

Είναι $\psi=h(x)\Leftrightarrow\psi=\ell n(x-2)\Leftrightarrow$

$e^{\psi}=x-2\Leftrightarrow x=e^{\psi}+2$

Δηλ. $h^{-1}(y)=e^{\psi}+2$

Η h συνεχής και $\uparrow$ στο $(2,+\infty)$ οπότε $h((2,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to2^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$

$=(-\infty,+\infty)$

Γιατί $\lim\limits_{x\to2^+}\ell n(x-2)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x-2)=+\infty$

Άρα $h^{-1}(x)=e^x+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

Β3. $\lim\limits_{x\to2}\left(h(x)\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=$

$$=\lim_{x\to2}\left(\ell n(x-2)\frac{2\ell n(x-1)}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{h\to2}\left(2\ell n(x-2)\frac{\ell n(x-1)}{x-2}\right)$$

$$=2\cdot(-\infty)\cdot 1=-\infty$$

Γιατί $\lim\limits_{h\to 2^+}\dfrac{\ell n(x-1)}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$

Και $\lim\limits_{x\to 2^+}\ell n(x-2)=-\infty.$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1},\quad \kappa,\mu\in\mathbb{R}$$

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η $\psi=x$ εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$.

i) Αν $\kappa\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\kappa x)=\left|\begin{array}{l}\to+\infty \text{ αν } \kappa\succ 0\\ \to-\infty \text{ αν } \kappa\prec 0\end{array}\right.\quad \textbf{άτοπο}$$

Άρα $\kappa=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x}{x^2}=0$

ii) οπότε $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{\mu\left(x^2+1\right)-\mu x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\mu-\mu x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Είναι: $f'(0)=1\Leftrightarrow\dfrac{\mu}{1}=1\Leftrightarrow\boxed{\mu=1}.$

Γ2.

i) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$$

$x=-1$ **ή** $x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $f(1)=\dfrac{1}{2}$

ii) Η f συνεχής και $\downarrow$ στο $(-\infty,-1]$ οπότε $f\left((-\infty,-1]\right)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$

$=\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$.

Η f συνεχής και $\uparrow$ στο $[-1,1]$ οπότε $f\left([-1,1]\right)=\left[f(-1),f(1)\right]=$

$=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

Η f συνεχής και $\downarrow$ στο $[1,+\infty)$ οπότε $f([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=$

$=\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Άρα $f((-\infty,+\infty))=\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]=$

$=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

Αν $\alpha\neq 0$ τότε $\frac{1}{2}+\alpha^2\succ\frac{1}{2}$

άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ είναι **αδύνατη.**

Αν $\alpha=0$ τότε η εξίσωση γίνεται $f(x)=\frac{1}{2}$ και έχει μια ρίζα την $x=1$.

Γ3. $I_\nu=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx,\ \ \nu\in\mathbb{N}$

i) Είναι: $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=$

$=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=$

$=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx=$

$=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=$

$$=\frac{1}{2\nu+2} \quad \textbf{(1)}$$

ii) $I_0=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ell n\left(x^2+1\right)\right]_0^1=$

$$=\frac{1}{2}\ell n2$$

$$(1)\overset{\nu=0}{\Rightarrow} I_0+I_1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell n2+I_1=\frac{1}{2}$$

$$I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ell n2$$

$$(1)\overset{\nu=1}{\Rightarrow} I_1+I_2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ell n2+I_2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$I_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ell n2$$

$$I_2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ell n2$$

<u>**Θέμα Δ**</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, f' συνεχής

- $0<g(x)<1,\ x\in\mathbb{R} \quad (1)$
- $g'(x)\neq -1,\ x\in\mathbb{R}$

Δ1. $h(x)=g(x)+x,\ \ x\in[-1,0]$

• Η h συνεχής ως άθροισμα συνεχών

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ h(-1)=g(-1)-1\overset{(1)}{\prec}0\\ \bullet\ h(0)=g(0)\overset{(1)}{\succ}0\end{array}\right\}\Rightarrow h(-1)h(0)\prec 0$$

<u>Θ. Bolzano</u>

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ ώστε $h(x_1)=0$ δηλ. $g(x_1)+x_1=0$.

Έστω ότι η h έχει και δεύτερη ρίζα $\rho\in(-1,0)$ $\ \ $(υποθέτουμε $x_1\prec\rho$)

• Η h συνεχής στο $[x_1,\rho]$.

• Η h παραγωγίσιμη στο (x_1,ρ) με $h'(x)=g'(x)+1$

• $h(x_1)=0=h(\rho)$

<u>Θ. Rolle</u>

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,\rho)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)=-1$ **άτοπο**

Άρα το x_1 μοναδική ρίζα.

Δ2. $f(x)=\begin{cases}x^2\big(g(x)+x\big), & x\in(-\infty,0)\\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\cancel{^2}\big(g(x)+x\big)}{\cancel{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2ημx+εφx-κx}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2ημx}{x}+\frac{εφx}{x}-κ\right)=2+1-κ=3-κ$$

Πρέπει : $3-κ=0 \Leftrightarrow \boxed{κ=3}$

Δ3. Δηλ. $f(x)=\begin{cases} x^2\left(g(x)+x\right), & x\in(-\infty,0) \\ 2ημx+εφx-3x, & x\in\left[0,\frac{π}{2}\right] \end{cases}$

i) Για $x\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$, είναι:

$$f'(x)=2συνx+\frac{1}{συν^2x}-3$$

$$f''(x)=-2ημx+\frac{2ημxσυνx}{συν^4x}=$$

$$=-2ημx+\frac{2ημx}{συν^3x}=$$

$$=2ημx\left(\frac{1}{συν^3x}-1\right)\succ 0$$

Γιατί: $0\prec συνx\prec 1\Rightarrow συν^3x\prec 1\Leftrightarrow \frac{1}{συν^3x}\succ 1$

και $2ημx\succ 0$

άρα η $f'\uparrow\left[0,\frac{π}{2}\right)$

$f'(0)=0$ οπότε για $x\succ 0\Rightarrow f'(x)\succ f'(0)$

$\Rightarrow f'(x)\succ 0$

άρα η $f\uparrow\left[0,\frac{π}{2}\right)$

οπότε για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

$\Rightarrow f(x) \geq 0.$

ii) $3f(x) = \pi \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Η f είναι συνεχής και $\uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)$

$= [0, +\infty)$

Το $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει μοναδική ρίζα x_2 στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4.

i) Από **Δ1,**

είναι: $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και η h' συνεχής οπότε η h' διατηρεί πρόσημο.

Δηλαδή η h είναι γνησίως μονότονη

και επειδή $h(-1) \prec 0 \qquad h(0) \succ 0$

άρα η $h \uparrow$

Είναι : $x \succ x_1 \overset{\boxed{\Delta 1.}}{\Rightarrow} h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow h(x)\geq 0 \Rightarrow g(x)+x\geq 0 \\ \text{και} \quad x^2\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x^2\left(g(x)+x\right)\geq 0 \;\; \text{δηλ.}\; f(x)\geq 0$$

ii) $E_1\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/3}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)dx$

$$=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-\ell n(\sigma\upsilon\nu x)-3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/3}$$

$$=-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\ell n\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)-3\frac{\pi^2}{2\cdot 9}$$

$$+2\sigma\upsilon\nu 0+\ell n(\sigma\upsilon\nu 0)-0=$$

$$=(-2)\left(\frac{1}{2}\right)-\ell n\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{6}+2+\ell n1=$$

$$=-1-(\ell n1-\ell n2)-\frac{\pi^2}{6}+2=$$

$$=1+\ell n2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$E_2=\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{0} x^2\left[g(x)+x\right]dx=$$

$$=\int_{x_1}^{0}\left[x^3+x^2g(x)\right]dx=$$

$$=\int_{x_1}^{0}x^3dx+\int_{x_1}^{0}x^2g(x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}+\int_{x_1}^{0}\left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)\,dx$$

$$=-\frac{x_1^{\ 4}}{4}+\left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)\,dx$$

$$=-\frac{x_1^{\ 4}}{4}-\frac{x_1^{\ 3}}{3}\cdot g(x_1)-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx$$

$$\overset{\boxed{\Delta 1.}}{=}-\frac{x_1^{\ 4}}{4}-\frac{x_1^{\ 3}}{3}(-x_1)-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx$$

$$=-\frac{x_1^{\ 4}}{4}+\frac{x_1^{\ 4}}{3}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx$$

$$=\frac{x_1^{\ 4}}{12}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx$$

Είναι: $E_1=E_2 \Leftrightarrow$

$$1+\ell n2-\frac{\pi^2}{6}=\frac{x_1^{\ 4}}{12}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx$$

$$\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}3+3\ell n2-\frac{\pi^2}{2}=\frac{x_1^{\ 4}}{4}-\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx=\frac{x_1^{\ 4}}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ell n2-3$$